УДК 512.628.2 : 623.021:005

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОПЕРНИЧЕСТВА С УЧЕТОМ ФАКТОРА Л.Н. ТОЛСТОГО

С.В. Гадецкая, В.Ю. Дубницкий
(Харьковский банковский институт Украинской академии банковского дела НБУ)

Получены решения линейных и нелинейных уравнений Ланчестера с учетом морального состояния участников конфликта. Приведены таблицы необходимого количественного превосходства для обеспечения победы одной из сторон.

уравнения Манчестера, фактор Л.Н. Толстого, конфликтная ситуация, коэффициент численного перевеса

Постановка проблемы. В настоящее время известны различные виды дифференциальных уравнений соперничества, позволяющие моделировать конфликт сторон X и Y (X – оперирующая сторона). Особенность их решения в том, что условием прекращения конфликта является полное исчерпание ресурса одной из сторон (война на истощение). При решении этих уравнений не рассматривают такой важный фактор, как политическая и психологическая готовность каждого участника конфликта к его продолжению.

При любой степени автоматизации средств, участвующих в конфликте, они (эти средства) представляют собой человеко-машинные комплексы, а ведь еще Сунь Цзы писал о том, что у армии можно отнять ее дух, у полководца отнять его сердце.

Цель работы. Решение уравнений соперничества с учетом сведений о моральном состоянии участников конфликта и их использование на стадии предварительного планирования боя или операции.

Анализ литературы. Классическая система уравнений, моделирующая взаимодействие сторон (уравнение Ланчестера) имеет вид, приведенный в работе [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda_2 y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_1 x \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0; \qquad y(0) = y_0. \tag{2}$$

Принято, что x(t) – численность активных средств оперирующей стороны X в момент времени t, y(t) – это же для противостоящей стороны Y; λ_1, λ_2 – эффективность действия стороны X (Y) по выведению из строя активных средств стороны Y (X).

В работе [2] получено решение этой системы в относительном виде:

$$\tilde{x}(t) = ch\left(\lambda_1\sqrt{k}\cdot t\right) - u\sqrt{k}sh\left(\lambda_1\sqrt{k}\cdot t\right), \tag{3, а}$$

$$\tilde{y}(t) = uch\left(\lambda_1\sqrt{k}\cdot t\right) - \sqrt{1/k}\; sh\left(\lambda_1\sqrt{k}\cdot t\right) \tag{3, б}$$

при условии, что:

$$\lambda_2 = \lambda_1 k; \;\; y_0 = ux_0; \;\; k > 0, \; \tilde{x}(t) = x(t)\cdot x_0^{-1}; \;\; \tilde{y}(t) = y(t)\cdot x_0^{-1}. \tag{4}$$

В работе [3] введено понятие фактора Л.Н. Толстого как условия, определяющего «желание сторон драться и подвергать себя опасностям» [4]. Это желание определяют величинами коэффициентов:

$$\varphi_x(t) = x(t)/x_0; \quad \varphi_y(t) = \varphi_y(t)/x_0. \tag{5}$$

Конфликт между сторонами X и Y продолжается до тех пор, пока одна из сторон первой не достигнет предельно допустимого уровня потерь φ_x или φ_y, определяемых внешними, по отношению к модели (1), (2) условиями. В [3] показано, что начальные условия сторон-участников конфликта в этом случае корректируют по правилу:

$$X_0 = x_0\sqrt{1-\varphi_x^2}, \quad Y_0 = y_0\sqrt{1-\varphi_y^2} \tag{6}$$

при условии

$$0 \le \varphi_x < 1; \qquad 0 \le \varphi_y < 1. \tag{7}$$

Уравнения (1) справедливы в том случае, когда участники конфликта придерживаются в своих действиях правил, описанных в работе [5]. В этом случае будем называть их *комбатантами*.

В том случае, когда сторона Y действует малыми группами и придерживается правил, упомянутых в работе [6], сторону Y будем называть *инсургентами* [7].

Для моделирования взаимодействия комбатантов (X) и инсургентов (Y) система дифференциальных уравнений приведена в работе [8], а ее решение в традиционной постановке в работе [9].

Изложение результатов. На стадии планирования конфликта необходимо, с той или иной степенью точности, оценить силы, необходимые для успеха и длительность их участия в конфликте. Если в конфликте со стороны X и Y участвуют комбатанты, то есть справедлива система (1), то для успеха стороны X с учетом значения фактора Толстого в [3] получено неравенство

$$x_0\sqrt{1-\varphi_x^2} > y_0\sqrt{1-\varphi_y^2}\,, \tag{8}$$

откуда коэффициент превышения сил стороны X над силами стороны Y до начала конфликта

$$K_{ex}^{(T)} = \frac{x_0}{y_0} > \sqrt{\frac{1-\varphi_y^2}{1-\varphi_x^2}}\,. \tag{9}$$

Его численные значения приведены в табл. 1.

Таблица 1

Величина коэффициента $K_{ex}^{(T)}$ в зависимости от уровня фактора Толстого для сторон X и Y – φ_x, φ_y

φ_y \ φ_x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	1	1	1	1	1,2	1,2	1,4	1,6	2,3
0,2	1	1	1	1	1,1	1,2	1,4	1,6	2,5
0,3	1	1	1	1	1	1,2	1,3	1,6	2,2
0,4	1	1	1	1	1	1,1	1,3	1,5	2,1
0,5	1	1	1	1	1	1	1,1	1,4	2
0,6	1	1	1	1	1	1	1,1	1,3	1,8
0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,8	0,8	1	1,2	1,6
0,8	0,6	0,6	0,6	0,8	0,7	0,75	0,8	1	1,4
0,9	0,4	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,6	0,7	1

Для расчета действительного уровня величины K_{ex} необходимо приведенную в табл. 1 величину умножить на коэффициент превышения, учитывающий вероятностную оценку успеха в конфликте K_{pr} от приведенной в работе [10]:

$$K_{ex} = K_{ex}^{T} K_{pr}\,. \tag{10}$$

Пусть левые части уравнений (3, а, б) равны φ_x и φ_y соответственно. При этом величина φ_x определяется руководством стороны X, величину φ_y оценивают эксперты стороны Y способами, описанными в работе [11].

Решение системы (3, а, б) относительно величин u и t (в данном случае величина $u = K_{ex}$) выполнено методом Ньютона [12].

Пусть:

$$F(u,t) = \varphi_x - ch\left(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t\right) - u\sqrt{k} sh\left(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t\right) = 0; \tag{11}$$

$$G(u,t) = \varphi_y - uch\left(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t\right) - \sqrt{1/k} \cdot sh\left(\lambda_1 \sqrt{k} \cdot t\right) = 0. \tag{12}$$

Тогда:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{J(u_n,t_n)} \begin{vmatrix} F(u_n,t_n) & F'_t(u_n,t_n) \\ G(u_n,t_n) & G'_t(u_n,t_n) \end{vmatrix}; \tag{13}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{1}{J(u_n,t_n)} \begin{vmatrix} F'_u(u_n,t_n) & F(u_n,t_n) \\ G'_u(u_n,t_n) & G(u_n,t_n) \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Якобиан системы

$$J(u_n,t_n) = \begin{vmatrix} F'_u(u_n,t_n) & F'_t(u_n,t_n) \\ G'_u(u_n,t_n) & G'_t(u_n,t_n) \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Несмотря на то, что задачу решали численно, для анализа факторов, влияющих на результат моделирования, целесообразно на каждом шаге иметь соответствующие аналитические выражения. Для их получения использовали программные среды, допускающие выполнение аналитических преобразований (13, 14):

$$F'_u(u,t) = \frac{\sqrt{k}}{2}\left(\exp\left(-\lambda_1 t\sqrt{k}\right) - \exp\left(\lambda_1 t\sqrt{k}\right)\right); \tag{16}$$

$$F'_t(u,t) = \frac{\lambda_1\sqrt{k}}{2}\left(\exp\left(-\lambda_1 t\sqrt{k}\right)\cdot\left(1 - u\sqrt{k}\right) - \exp\left(\lambda_1 t\sqrt{k} + 1\right)\right); \tag{17}$$

$$G'_u(u,t) = \frac{1}{2u^2\sqrt{k}}\left(\exp\left(\lambda_1 t\sqrt{k}\right) - \exp\left(-\lambda_1 t\sqrt{k}\right)\right); \tag{18}$$

$$\begin{aligned} G'_t(u,t) = \left(-\frac{\lambda_1}{2u}\right)\Big(\lambda_1 \exp\left(\lambda_1 t\sqrt{k}\right) + \lambda_1 \exp\left(-\lambda_1 t\sqrt{k}\right) \; - \\ - \left(\lambda_1\sqrt{k}/2\right)\cdot\left(\exp\left(-\lambda_1 t\sqrt{k}\right) + \exp\left(\lambda_1 t\sqrt{k}\right)\right)\Big). \end{aligned} \tag{19}$$

В том случае, когда в конфликте участвуют комбатанты (X) и инсургенты (Y) система дифференциальных уравнений становится нелинейной следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -k\lambda_2 y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\lambda_1 xy \end{cases} \tag{20}$$

с начальными условиями (2).

В работе [8] показано, что равновесие сторон будет при условии

$$\frac{\lambda_1}{2}x_0^2 - \lambda_1 y_0 = c. \tag{21}$$

Сторона X одержит победу, если $c > 0$ или $\frac{\lambda_1/2}{\lambda_2} > \frac{y_0}{x_0^2}$; сторона X потерпит поражение, если $c < 0$ или $\frac{\lambda_1/2}{\lambda_2} < \frac{y_0}{x_0^2}$.

Тогда с учетом фактора Толстого получим, что

$$\frac{\lambda_1}{2}x_0^2\left(1-\varphi_x^2\right) = \lambda_2 y_0\left(1-\varphi_y^2\right). \tag{22}$$

Принимая во внимание (4) получим, что равновесие между комбатантами (X) и инсургентами (Y) возможно при условии, что комбатанты будут иметь численное преимущество над инсургентами

$$\frac{1}{u} = \sqrt{2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{\sqrt{1-\varphi_y^2}}{1-\varphi_x^2}}. \tag{23}$$

Соответствующие расчеты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Величина количественного превосходства комбатантов (X) над инсургентами (Y) в зависимости от уровня фактора Толстого φ_x у комбатантов и их огневого превосходства над инсургентами (λ_2/λ_1)

λ_2/λ_1 \ φ_x	0,99	0,94	0,89	0,84	0,79	0,74
3:1	42	17	12	10	9	9
2:1	20	8,5	5,7	3,5	3	3
1:1	14	6	4	3,5	3	3
1:2	10	4,2	3	2,5	2	2
1:3	4,7	2	1,5	1,2	1	1

При расчете этой таблицы было установлено, что величина φ_y влияет на уровень численного превосходства комбатантов значительно меньше, чем соотношение эффективных боевых возможностей сторон (λ_2/λ_1). При анализе табл. 2 следует учесть, что указанные в ней данные отвечают уровню вероятности успеха комбатантов $P = 0{,}5$.

В работе [8] показано, что для успеха комбатантов необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\frac{\lambda x^2(t)}{2} - k\lambda y(t) > c\ . \quad (24)$$

Примем, что величина c = q, выбранному с учетом коэффициентов превосходства, указанных в табл. 2.

Тогда получим, что

$$\frac{\lambda_1 x^2}{2} - k\lambda y = q\ . \quad (25)$$

С учетом этого и системы (20) получим, что

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = q - \dfrac{\lambda_1 x^2}{2}; & (26,\ а) \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sqrt{2\lambda_1}\, y\sqrt{q + k\lambda_1 y} & (26,\ б) \end{cases}$$

при начальных условиях

$$x(0) = x_0^{(T)} = x_0\sqrt{1-\varphi_x^2} \quad (27)$$

и

$$y(0) = y_0^{(T)} = y_0\sqrt{1-\varphi_y^2}\ . \quad (28)$$

Для уравнения (26, а) получим, что

$$\frac{dx}{q_1 - \dfrac{\lambda_1 x^2}{2}} = dt\ . \quad (29)$$

Следовательно, после интегрирования получим

$$-\frac{1}{\sqrt{2\lambda q}} \ln\left|\frac{x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{2q}}{x\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{2q}}\right| = t + G_1, \quad (30)$$

где G_1 – постоянная интегрирования.

Тогда приняв, что

$$\frac{x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{2q}}{x\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{2q}} = R(x), \quad (31)$$

имеем

$$R(x) = R\left(x_0^{(T)}\right)\exp\left(-\frac{t}{\sqrt{2\lambda_1 q}}\right). \quad (32)$$

Для уравнения (26б) получим, что

$$P(y) = P(y_0)\exp\left(-\frac{t}{\beta\sqrt{2}}\right), \quad (33)$$

при условии, что

$$\beta = \sqrt{\lambda_1 q} \quad (34)$$

и $$P(y_0)=\frac{\left(\sqrt{k\lambda y_0}+q-\sqrt{q}\right)^2}{y}. \qquad (35)$$

Таким образом, приведенные решения дают возможность моделировать широкий класс конфликтных ситуаций.

Выводы. 1. Решены уравнения взаимодействия сторон с учетом их морального состояния в начале конфликта.

2. Определены значения коэффициента численного перевеса одной из сторон, обеспечивающие ей победу в конфликте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.*
2. *Дубницкий В.Ю. Решение дифференциальных уравнений моделей соперничества // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2000. – Вип. 2 (28). – С. 63 – 68.*
3. *Павловский Ю.Н. О факторе Л.Н. Толстого в вооруженной борьбе // Математическое моделирование. – 1993. – Т.5, № 1. – С. 5 – 15.*
4. *Толстой Л.Н. Война и мир. – М.: Художественная литература, 1987. – Кн. 2. – С. 427 – 428.*
5. *Тактика в боевых примерах: Батальон. – М.: ВИМО СССР, 1958. – 236 с.*
6. *Курочкин В.И. О целях и критериях эффективности применения вооруженных сил в партизанской войне // Военная мысль. – 2002. – № 1. – С. 64 – 65.*
7. *Советский энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1981. – 1600 с.*
8. *Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука. Физмат, 1997. – 320 с.*
9. *Гадецкая С.В., Дубницкий В.Ю. Решение нелинейных дифференциальных уравнений взаимодействия конфликтующих структур // Системи обробки інформації. – Х.: НАНУ, ПАНМ, ХВУ. – 2002. – Вип. 4 (20). – С. 63 – 68.*
10. *Гадецька С.В., Дубницький В.Ю., Ходирєв О.І. Оцінка рівня загрози та ймовірності успішної протидії несанкціонованому проникненню у приміщення, що їх охороняють // Системи обробки інформації. – Х.: ХВУ. – 2004. – Вип. 3. – С. 18 – 22.*
11. *Кудрявцев А.М. Обработка разведывательной информации. – Л.: Военная академия связи, 1989. – 331 с.*
12. *Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука. Физмат, 1966. – С. 152.*
13. *Дьяконов В.П. Системы компьютерной алгебры DERIVE. – М.: Солон-Р, 2002. – 307 с.*
14. *Кирьянов Д.В. Самоучитель MathCad 2001. – СПб.: БХВ-Петербург. – 544 с.*

Поступила 24.02.2005

Рецензент: доктор технических наук, профессор Е.А. Артеменко, Украинская государственная академия железнодорожного транспорта, Харьков.